

最適輸送距離による正則化されるブラックホール動画再構成

アンディ・ニリポール

1. はじめに

電波天文学とは、電波により天体や宇宙を観測することである。電波では、人間が見える可視光と比べると、低温と低密の宇宙が観察できるため、両者を組み合わせることにより、宇宙を全体的に理解することが可能になる。しかし、望遠鏡の角分解能が波長により物理的に制限されており、電波が可視光より波長が長いため、電波望遠鏡は一般に可視光望遠鏡よりも角分解能が劣る。その問題を解決するため、超長基線電波干渉計という方法が発展された。

超長基線電波干渉計とは、世界中の複数の電波望遠鏡の使用を通じ、個々の望遠鏡間の最大距離に等しい直径を持つ電波望遠鏡と同等の解像度を得ることができる方法である（川尻 1982, pp. 240-242）。しかし、この方法を使用すると、得るデータは可視光の場合のように画像ではなく、複素ビジビリティということになるという。複素ビジビリティは、天球上の2次元電波輝度分布とフーリエ変換の関係がある（秋山 2020, p. 6）。理想的に、逆フーリエ変換を使えば、電波輝度分布、つまり電波画像を得ることができる。ただし、世界中の望遠鏡を使用することで、実質的に多くの穴が開いた大きな望遠鏡が完成しているため、複素ビジビリティは正確にフーリエ変換された画像ではなく、欠陥がある。そのため、直接に逆フーリエ変換が使えず、その代わりに様々なアルゴリズムが発展されている。

最近人気になっているアルゴリズムの1つは正則化付最尤推定法である（秋山 2020, p.6）。最尤推定法というのは、観察されたデータを確率が最も高くするパラメータを見

つける方法だ（田崎 2019, pp. 446-447）。ブラックホールの画像化からすると、観察されたデータは複素ビジビリティであり、パラメータは画像である。しかし、前述の通り、この問題が良決定問題ではなく、確率を最も高くするパラメータは唯一の解がない。そのため、正則化項がよく使われている。これは、一部のソリューションに罰則をかけ、不良決定問題を解くことを可能にする。例えば、画像化の場合で、L1ノルム（ピクセルの絶対値の総和）正則化項はスパースではない画像に罰則を科す。すなわち、0が多い画像が優先されている。他の正則化項は、画像の全輝度が非負である、あるいは滑らかであることなどを優先する（Akiyama et al. 2017, pp. 1-4）。

イベント・ホライゾン・テレスコープ（EHT）とは、超長基線電波干渉計を用い、史上最高の解像度を実現したプロジェクトである（秋山 2018, p. 361）。2019年、EHTによって人類史上初の「ブラックホールシャドウ」の撮像が発表された（秋山 2021, pp. 189-191）。ブラックホールの存在がアインシュタインによって予言され、宇宙の各銀河の中心にブラックホールが存在することが思われているという。ブラックホールは、自らの重力が非常に強いため、事象の地平面と呼ばれる情報の境界面が存在し、この領域の中部から、光すらも外部への脱出が不可能だ。しかし、ブラックホールの周りでは、ガスや物質が高い速度で運動し、摩擦による加熱させ、電磁スペクトル全体にわたって光を放射する。この領域は、膠着円盤と呼ばれる。事象の地平面のすぐ外側では、光子球と呼ばれる領域が存在し、この領域に入る光子が必ず事象の地平面に落ちる。そのため、膠着円盤に光子球の形をした影が作らる。この「ブラックホールシャドウ」は EHT による観察されるものである。

近い将来には、ブラックホールの画像だけではなく、動画も可能になる。現在の EHT の高い解像度が確かだが、世界中の望遠鏡を 8 台しか使用しないため、感度が不足であり、長い積分時間が必要である。しかし、いて座 A* は 30 分程度の周期的な変動を示すため、観察される間、ブラックホールの周りのガスが発する電波が大きく変化する。この変化の動画の再構成を行うため、より多くの電波望遠鏡を利用する次世代のイベント・ホライズン・テレスコープ (ngEHT) や宇宙電波望遠鏡を利用するブラックホールエクスプローラー (BHEX) などの近未来の超長基線電波干渉計が必要だ (Lupsasca 2024, p. 2; Johnson et al. 2023, pp. 4-6)。このような干渉計を通じ、観察の積分時間が短くなる、いて座 A* の形と明るさの変化を捉えることができる。しかし、動画を再構成するため、データ量と分析の複雑性が増加する。従って、新しいアルゴリズムの発展も必要である。

動画の再構成で、近くのフレームを類似させたいため、大きな差がある隣接フレームに罰則を科す正則化項を使った方が良い。しかし、フレーム間の類似度をどのように数値化するのだろうか。各フレームを画像として、またはより簡単に言えば確率分布として扱えば、類似度を測る方法がいくつかある。最も簡単なのは、ピクセル単位の距離、すなわち全てのピクセルの 2 枚のフレーム間の差の合計である。しかし、これは基礎となるブラックホールの周りのガスの動きに関する情報が含まれていない。一方で、最適輸送距離という確率分布の類似度を定義する距離は、物理的な動きを考慮する。最適輸送距離を説明するために、確率分布を砂の山として扱う例がよく挙げられている。砂の山が 2 つある場合からすると、山間の最適輸送距離は、1 つの山の砂を全て移動させるのに必要な最小限の (物理学的な) 仕事だ (高津 2014, pp. 172-173)。すなわち、砂の

単位をあるピクセルから別のピクセルに移動するための「コスト」を与えるコスト行列が与えられると、総コストを最小化する輸送行列を見つける距離である。輸送行列は、ピクセルから別のピクセルに移動する砂の量を示す行列だ。通常、ピクセル間のコストは普通のユークリッド距離であるが、他の可能性もある。コスト行列があり最適輸送行列を見つけるため、最適輸送距離はフレーム間の物理的な動きや回転に関する情報が含まれている。

本研究では、正則化付最尤推定法の枠組みで、最適輸送距離をフレーム間の正則化項とする利用を提案する。実際に、最適輸送距離はピクセル単位距離よりも動画再構成に良い正則化項になるのだろうか。本稿では、まず正則化付最尤推定法と最適輸送距離のための数学についてより深く解決し、次に最適輸送距離とブラックホールのシミュレーションについての実験の結果を報告する。その後、EHTの観察シミュレーションから再構成した動画を紹介し、最適輸送距離を使わない動画と比較する。今後の課題についての議論で終了する。

2. 正則化付最尤推定法

前述の通り、超長基線電波干渉計の観測からのデータがまばらであるので、画像を得るため直接に逆フーリエ変換ができない。すなわち、データ量に対して画像のピクセル数の方が多いので、解が唯一ではない。しかし、条件をつけると、画像化が可能になる。ブラックホールの画像の再構成でよく使われている条件は、画像のほとんどの領域での値がゼロであることと画像が滑らかであり、ほとんどの隣接するピクセル間の差はゼロであることだ (Akiyama et al. 2017, pp. 1-5; 秋山 2020, pp. 4-6)。この2つの条件

は宇宙と物理的な天体の一般化に基づいている。このような条件を使うと、解きたい方程式は

$$\arg \min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_2^2 + \alpha_\ell \|\mathbf{x}\|_1 + \alpha_{\text{tsv}} \|\mathbf{x}\|_{\text{tsv}})$$

となる。この方程式では、 \mathbf{y} は観測のデータであり、 \mathbf{x} はモデルであり、 \mathbf{A} はフーリエ変化が含まれる観測演算子であり、 $\|\cdot\|_i$ は i のノルムと表す。簡単に言えば、最初の項はモデルとデータの差だ。条件、すなわち正則化がないと、最尤推定法は

$$\arg \min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_2^2)$$

となる。データ \mathbf{y} との差を最小化するモデル \mathbf{x} を解くことを表すが、このような \mathbf{x} が無数存在する。2つ目の項は、モデルの L_1 ノルムの正則化項、すなわち

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i,j} |x_{ij}|$$

だ。方程式から見える通り、 L_1 ノルムは全てのピクセルの絶対値の合計である。 L_1 ノルムが小さければ小さいほど、値がゼロであるピクセルの数が増加するため、この正則化項は1つ目の条件に相当する。3つ目の項は、モデルの TSV (トタル・スクエア・バリエーション) ノルムの正則化項、すなわち

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{tsv}} = \sum_{i,j} (|x_{i+1,j} - x_{i,j}|^2 + |x_{i,j+1} - x_{i,j}|^2)$$

だ。方程式から見える通り、 TSV ノルムは全ての隣接するピクセル間の差の二乗の合計である。 TSV ノルムが小さければ小さいほど、 \mathbf{x} の滑らかさが増やす。モデルとデータの差、 L_1 ノルム、 TSV ノルムの3つを同時に最小化するとき、重み α_ℓ と α_{tsv} は、各項の相対的な重要性をコントロールする。

上記の方程式を用いると、解の \mathbf{x} は結果の画像となる。解決するのは、標準的な最適化問題になる。最急降下法などのアルゴリズムを利用することが可能だ。

以上の正則化付最尤推定法の説明は、画像の再構成のためだ。動画の再構成はより複雑でありながら、ほぼ同様な手法が使える。よく使われている手順は、まず各フレームは1枚の画像として上記の同じ方法で再構成し、次フレーム間の正則化項を増加し、全てのフレームを一度に最小化する。すなわち、

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \sum_k \left(\sum_{i,j} (\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2^2 + \alpha_\ell \|\mathbf{x}_k\|_1 + \alpha_{\text{tsv}} \|\mathbf{x}_k\|_{\text{tsv}}) \right) + \alpha_f \|\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k\|_f$$

となる。この方程式では、以前のモデル・画像 \mathbf{x} が時間依存モデル・動画 \mathbf{x} になり、 \mathbf{x}_k が時間 k のフレームを表し、 f ノルムが任意のフレーム間の正則化項であり、 α_f がその正則化項の重みだ。確かに各フレームは1枚の画像として再構成せず、この方程式から直接に開始できるが、膨大な数のパラメータを同時に解決するのは計算コストが非常に高い。

3. 最適輸送距離

上記、ブラックホールの動画の再構成のため、各フレーム間の正則化項の必要性が確立確立された。本稿、最適輸送距離をこのような正則化項を提案する。ここでは、最適輸送距離とは何であるかを明らかにする。

セクション1で最適輸送距離を山の砂を全て別の山へ移動させるのに必要な最小限の(物理学的な)仕事として説明した。数学的に、

$$\min_{P \in \mathbb{R}^{n \times m}}, \arg \min_{P \in \mathbb{R}^{n \times m}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} P_{ij}$$

と表すことができる (高津 2014, pp. 173-174)。この方程式では、行列 C が前述のコスト行列であり、行列 P が前述の輸送行列である。すなわち、 P の ij 要素は、フレーム

1 のピクセル i からフレーム 2 のピクセル j にどれほどの砂を移動させる必要があるかを表し、 C_{ij} かける P_{ij} はその移動させることがどれほどのコストをかけるのかを表す。

最適輸送距離は、総コストを最小化する輸送行列を見つけ、同時にその最小コストを計算する。最小コストは「最適輸送距離」と呼ばれる。

実際に実施すると、方程式は

$$\min_{P \in \mathbb{R}^{n \times m}}, \arg \min_{P \in \mathbb{R}^{n \times m}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} P_{ij} - \epsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} (1 - \log P_{ij})$$

となる (Cuturi 2013, pp. 3-5)。最初の項は以前と同じであり、新しく増加された項は最適輸送距離とその導関数を計算するためのより簡単なアルゴリズムを可能にするという。しかし、直観的な物理的解釈はなく、紙幅が限られているため、本稿で説明しない。

4. 最適輸送距離の実験

セクション 1 で、理想的には、最適輸送距離は物理的な動きなどに関する情報が含まれていると述べたが、現実には、その情報が含まれているのだろうか。それを調べるため、実験を 2 つ考案した。最初に、最適輸送距離の輸送行列を「オプティカルフロー」の行列と比較した。オプティカルフローというのは、動画の中で物体の動きを表す方法であり、コンピューター科学でよく使われている。本稿で数学的な概念を説明しないが、基本的に、2 枚のフレーム間の物体の速度を表す行列を出力する。そのため、最適輸送距離が動きの情報を含むなら、輸送行列とオプティカルフローの行列が一致すると予想される。2 つ目の実験は、ブラックホールのシミュレーションで、2 枚のフレーム間の時間間隔を増やすにつれて最適輸送距離がピクセル単位距離より一貫して変化すること

を示す実験である。通常、ブラックホールのシミュレーションは、回転する高温ガスから構成され、そのガスは回転周期がある。従って、例えば、最初のフレームと回転周期が半分経過したフレーム間の「距離」は最も大きく、最初のフレームと回転周期が経過したフレーム間の「距離」はほぼ最小であることが予想される。

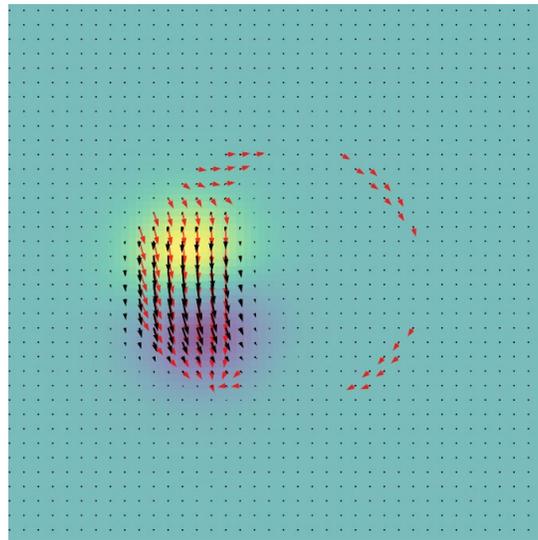


図 1：単純なシミュレーション、実験 1 の結果

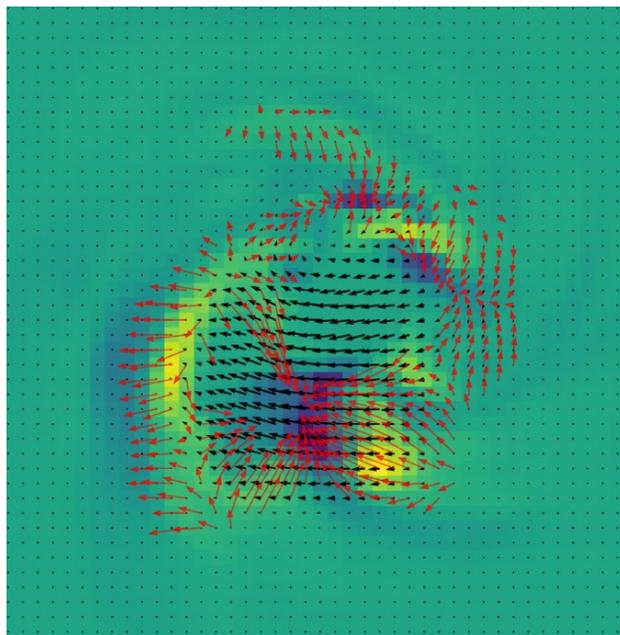


図 2：本当のブラックホールのシミュレーション、実験 1 の結果

実験を行うため、シミュレーションを2つ使用した。1つ目は、単純に一定の明るさのリングと回転する明るい点で構成されており、2つ目は、実際のブラックホールのシミュレーションである。

実験1の結果は、図1と図2に示されている。背景の緑色のプロットは、フレーム1とフレーム2の明るさの差が表示されている。すなわち、プロット上の明るい部分は、フレーム1の方が明るく、プロット上の暗い部分は、フレーム2の方が明るい。プロットの上部に、矢印が2セット表示される。黒い矢印は、フレーム間のオプティカルフローの行列を表し、赤い矢印は、フレーム間の最適輸送距離の輸送行列を表す。図1の明るい点は、リングの周りを反時計回りに動き、図2のガスは、時計回りに動く。

図からわかるように、オプティカルフローの矢印は予想通り、明るい部分の動きの方向をはっきりと指している。図1の単純なシミュレーションは、最適輸送距離の矢印がオプティカルフローの矢印とよく一致する。一方で、図2は、一致しないこともある。最適輸送距離の矢印は、明るい部分から暗い部分を指している。これは、輸送行列の定義から明らかであろう。オプティカルフローはより大きい「物体」の動きを表すが、最適輸送距離は個々の「ピクセル」の動きを表すため、直観比較することが難しい。しかし、その2つの表すことが完全に一致していないとは言えず、少なくとも、最適輸送距離が実際に動きの情報を含むことが確かである。

実験2の結果は、図3と図4に示されている。図の左側のプロットは、シミュレーションのフレームを3つ表示し、右側のプロットは、フレーム0とフレームn間のピクセル単位距離と最適輸送距離を表示する。図3の単純なシミュレーションは、回転周期が80フレームだ。予想通り、両方は周期的なパターンを示すが、最適輸送距離のプロット

トにはより多くの情報が含まれていることが正確に示されている。ピクセル単位距離の

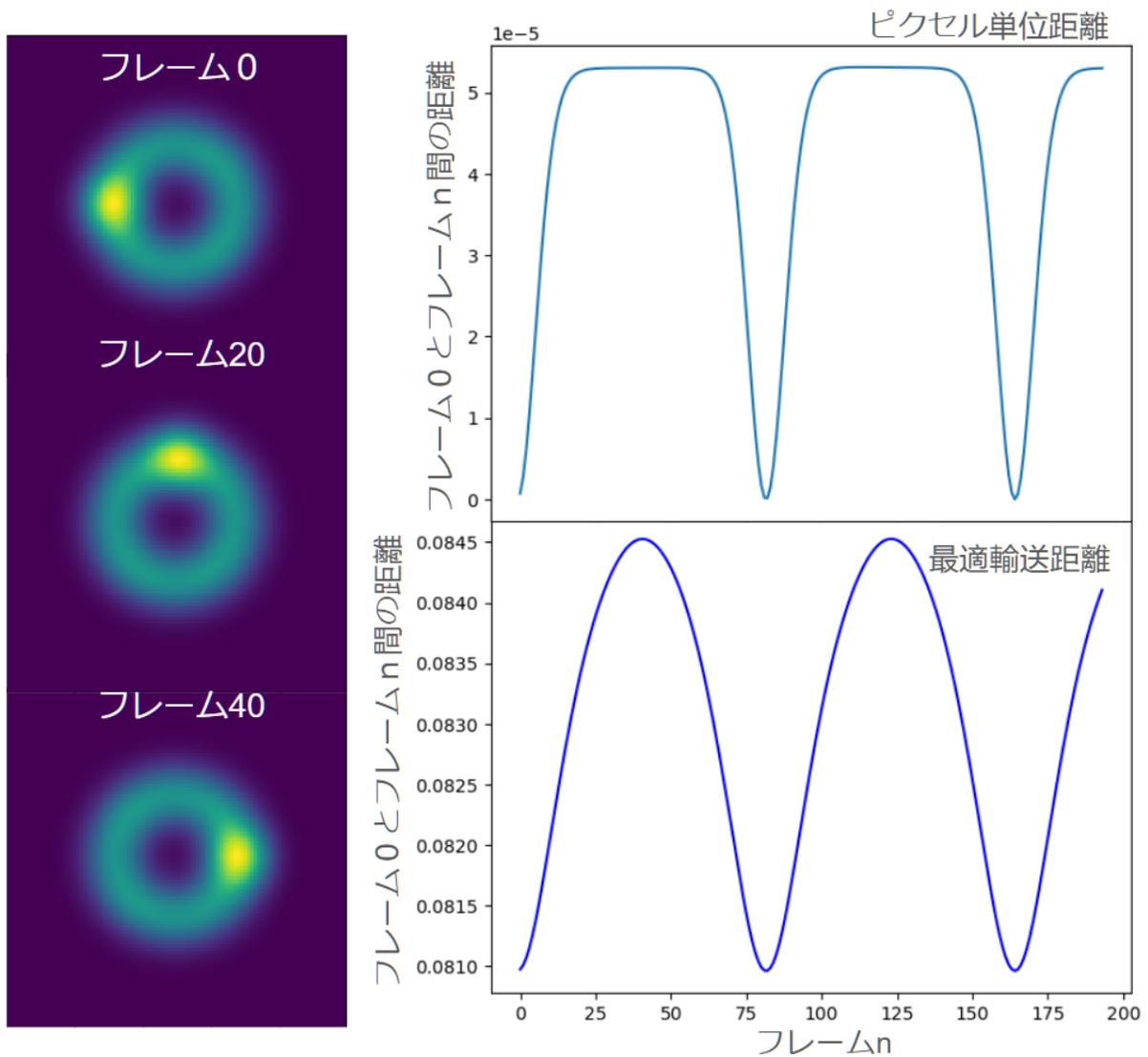


図3：単純なシミュレーション、実験2の結果

プロットは、フレーム20からフレーム60までのフレームが、フレーム0からほぼ同じ距離にあることを表示する。一方で、最適輸送距離のプロットは、フレーム40まで、フレーム0からの距離が大きくなり、フレーム40のフレーム0からの距離が最大であり、フレーム40からフレーム80まで、距離が小さくなる。この単純なシミュレーションから、なぜそのパターンがあるかが明らかである。フレーム20からフレーム60

までのフレームの明るい点は、フレーム0の明るい点と重なり合っていないため、ピクセル単位距離が一定するが、その明るい点はフレーム0の明るい点から遠ざかっている

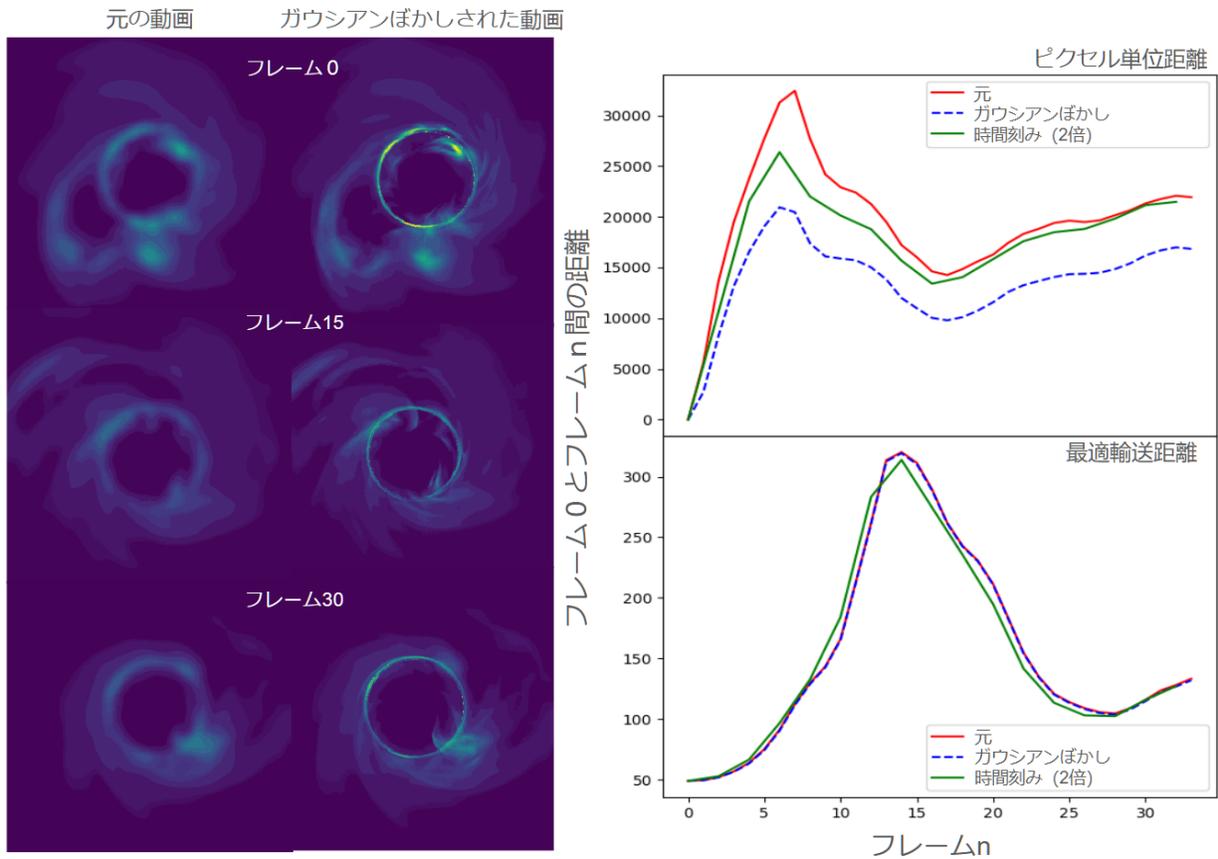


図4：本当のブラックホールのシミュレーション、実験2の結果

ため、最適輸送距離が変化する。

ブラックホールの本当のシミュレーションは、回転周期を定義するのが複雑である。しかし、動画で高温ガスの同じ明るい点を時間的に追うと、回転周期が30フレームであると言える。図3と同様に、図4の最適輸送距離のプロットが明らかに周期的なパターンがあり、回転周期が半分経過すると距離が最も大きくなり、1回転周期が経過すると距離がほぼ最も小さくなる。やはり図3程プロットが完璧ではないが、最適輸送距

離がピクセル単位距離より明らかに良い。ピクセル単位距離はフレーム 10 以降、情報が全て失われたようである。

図 4 の右側のプロットには、赤い線が図 3 のプロットと同じ価値を表すが、緑色と青色の線も表示されている。青い線は、ガウシアンぼかしされたシミュレーションの結果を表し、緑の線は、時間刻みが 2 倍のシミュレーションの結果を表す。ガウシアンぼかしというのは、動画の解像度を下げる方法である。解像度に依存しない距離が理想であり、図から見えるように、最適輸送距離が解像度に依存しないようだが、ピクセル単位距離が依存するようだ。同様に、時間刻みが何かに依存しない距離も理想であり、最適輸送距離がほぼ時間刻みに依存しないようだが、ピクセル単位距離が依存するようである。

上記より、実験の結果から最適輸送距離はピクセル単位距離よりも物理的な動きなどに関する情報が含まれていると言える。最適輸送距離をフレーム間の正則化項として使用すると、フレーム間の動きが追跡され、より良い再構成が出ると予想される。

6. 再構成の結果

セクション 2 で説明した正則化付最尤推定法を用い、シミュレーションの再構成を行い、結果を紹介する。手順は基本的に 2 部分に分かれている。まず、最適輸送距離を使用せず、ピクセル単位距離を正則化項として使用する。ピクセル単位距離の計算が比較的早いため、幅広いパラメータ空間を探索できる。次のステップとは、最適輸送距離を用い、再構成を行うことだ。最適輸送距離の計算が遅いので、最初のパラメータ探索から最適な再構成ができるパラメータを初期パラメータとして使用し、より小さなパラメータ空間を探索する。再構成の「良さ」を数値化するため、3次元相互相関を使

う。再構成が本当の動画と完璧に一致すれば、3次元相互相関が1になる。本研究では、前述の単純なシミュレーションを2017年の状態のEHTの観察をシミュレーションし、その再構成を行い、結果を図5で紹介する。図6には、再構成の平均からの残差、すなわち各フレームと動画全体の平均フレームの差が表示されている。

再構成された動画には50フレーム以上あり、本稿で全部示すことができない。図5と図6に示されているのは、左から右に最適輸送距離を用いた再構成と最適輸送距離を用いなかった再構成、本当の動画であり、上から下まで約1回転周期が経過する。

フレームの違い、さらに最適輸送距離を用いた再構成と最適輸送距離を用いてなかった再構成の違いは分かりづらいであろう。そのため、図7は3次元相互相関のヒストグラムを表示する。青い縦の線は、3次元相互相関が最も高い最適輸送距離を用いなかった再構成を表す。その再構成は図5と図6の中側に示している。赤いヒストグラムは、最適輸送距離を用いた全ての再構成の3次元相互相関を表し、最も高いの再構成は図5と図6の左側に示している。図7からわかるように、最適輸送距離を使用すると再構成が必ず向上するわけではないが、最良の再構成が最適輸送距離で達成される。

7. おわりに

以上、本稿では、正則化付最尤推定法と最適輸送距離の概念を説明し、最適輸送距離の実験の結果を報告し、観察シミュレーションから再構成した動画を紹介した。本研究の結果としては、最適輸送距離はブラックホールの物理的な動きなどの情報が含まれており、ピクセル単位距離よりも動画再構成に良い正則化項になることだ。

本稿では、一定の明るさのリングと回転する明るい点の単純なシミュレーションを使用し、EHT の観察シミュレーションしか調べなかった。セクション 1 で説明した通り、EHT の本当のブラックホール観察で動画を再構成することが複雑であるが、BHEX や ngEHT などの近未来の次世代超長基線電波干渉計は動画の再構成を可能にすることが期待される。本研究の時間が限られていたためできなかったが、今後 BHEX や ngEHT の同様な観察シミュレーションで最適輸送距離を用い、再構成を行う。

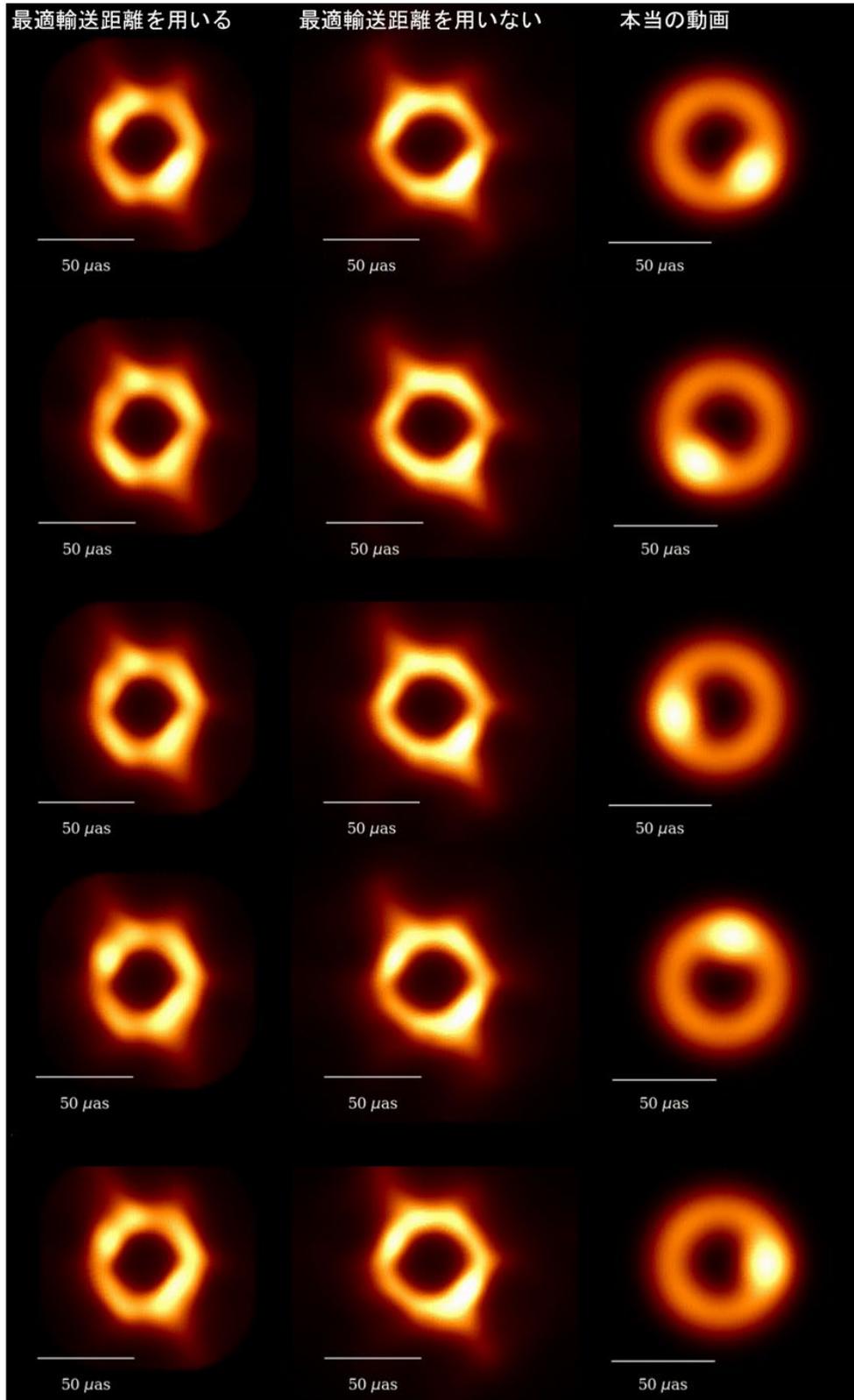


図 5 : 再構成の結果

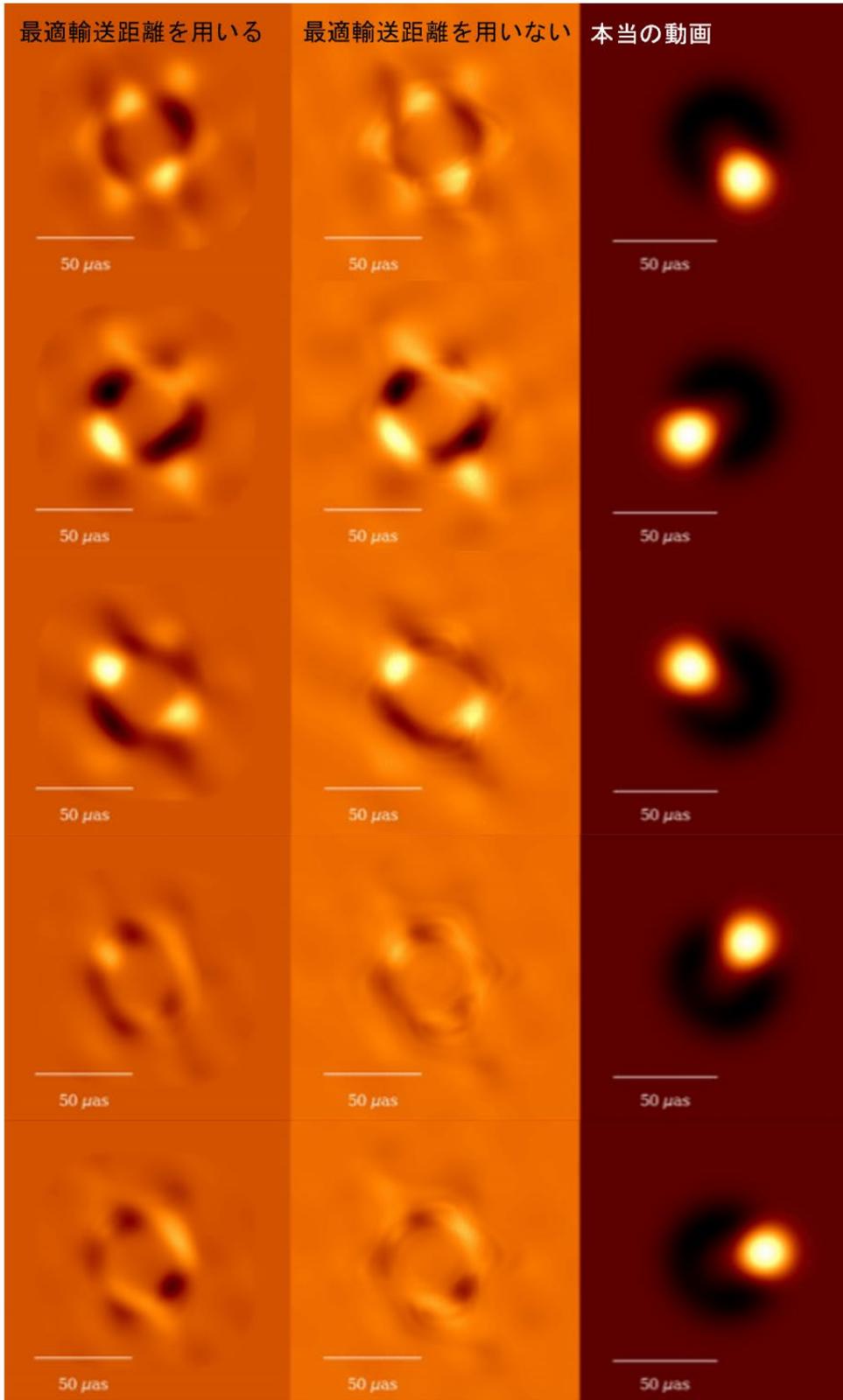


図 6 : 再構成の平均からの残差

最適輸送距離を用いた再構成の3次元相互相関

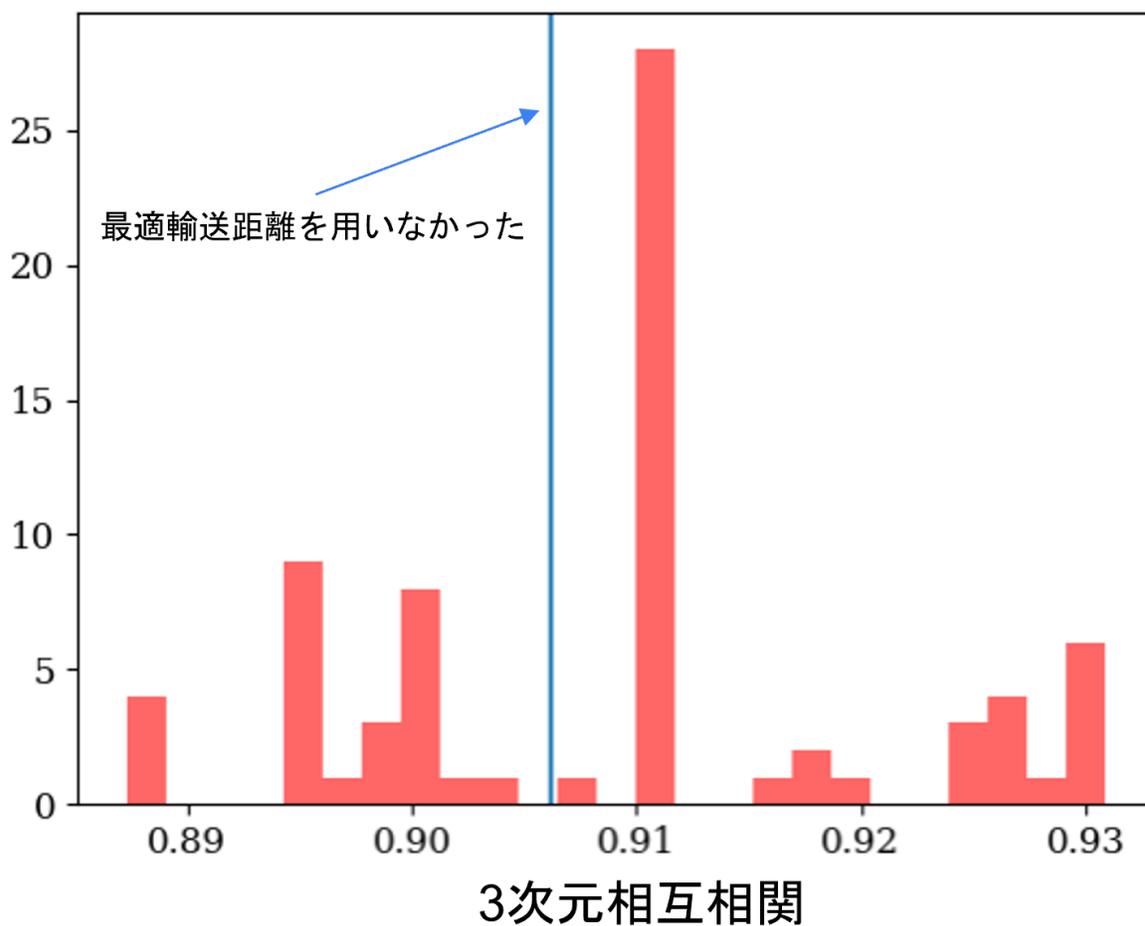


図 7 : 再構成の 3 次元相互相関のヒストグラム

参考文献：

- 川尻轟大 (1982) 「VLBI (超長期背電波干渉計) 技術の概観」『計測と制御』21 (2)、240-246
- 秋山和徳 (2021) 「Event Horizon Telescope による頂戴質量ブラックホールの事象の地平面スケールの観測 II」『天文月報』114 (3)、184-196
- 秋山和徳、中村雅徳、水野陽介、本間希樹 (2020) 「Event Horizon Telescope の初期成果」『日本物理学会誌』75 (1)、4-9
- 秋山和徳、本間希樹 (2018) 「Event Horizon Telescope による頂戴質量ブラックホールの事象の地平面スケールの観測」『天文月報』111 (6)、358-367
- 高津飛鳥 (2014) 「最適輸送理論梗概」『数理解析研究所講究録』1916, 172-185
- 田崎文得、小山翔子、森山小太郎 (2019) 「EHT による M87* のブラックホール画像化」『天文月報』112 (7)、446-447
- Akiyama, K., et al. (2017) “Imaging the Schwarzschild-radius-scale Structure of M87 with the Event Horizon Telescope Using Sparse Modeling.” *The Astrophysical Journal* 838, 1
- Akiyama, K., et al. (2017) “Superresolution Full-polarimetric Imaging for Radio Interferometry with Sparse Modeling.” *The Astronomical Journal* 153, 4
- Cuturi, M. (2013) “Sinkhorn Distances: Lightspeed Computation of Optimal Transport.” *Advances in Neural Information Processing Systems* 26
- Johnson, M., et al. (2023) “Key Science Goals for the Next-Generation Event Horizon Telescope.” *Galaxies* 11, 5
- Lupsasca, A., et al. (2024) “The Black Hole Explorer: Photon Ring Science, Detection, and Shape Measurement.” [Preprint] arXiv:2406.09498